

Modelarea piețelor financiare prin metode martingale

Piețe financiare de obligațiuni

Conf. dr. habil. Eduard Rotenstein

1 Modelul matematic

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ un câmp de probabilitate filtrat, cu filtrarea $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \leq T^*}$ satisfăcând condițiile uzuale, iar T^* este un moment terminal fixat. Toate procesele considerate vor fi definite pe acest câmp de probabilitate.

Definiția 1 *O obligațiune neplătitoare de dividende, cu maturitatea T (numită și T -bond) este un contract ce garantează deținătorului său plata unei unități monetare la momentul de maturitate T . Prețul activului financiar la momentul t va fi notat cu $B(t, T)$.*

Evident, $B(t, t) = 1$, oricare ar fi $t \in [0, T]$. Presupunem, de asemenea, că procesul stohastic al prețului $B(t, T)$, $t \in [0, T]$ este adaptat filtrării și este strict pozitiv, iar $B(t, T)$ este continuu diferențiabil în variabila T .

Definiția 2 1. Dobânda forward pentru intervalul $[T_1, T_2]$, considerată la momentul t , este definită de

$$R(t; T_1, T_2) := -\frac{\ln B(t, T_2) - \ln B(t, T_1)}{T_2 - T_1}.$$

2. Dobânda spot pentru perioada $[T_1, T_2]$ este definită prin

$$R(T_1, T_2) := R(T_1; T_1, T_2).$$

3. Dobânda instantanee forward, cu maturitatea T , la momentul t este definită prin

$$f(t, T) := -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T}.$$

4. Dobânda instantanee pe termen scurt (short-term interest rate) la momentul t este definită prin

$$r(t) := f(t, t).$$

Definiția 3 *Procesul ce dă structura contului de economii este dată de*

$$B(t) := \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right).$$

Lema 1.1 *Pentru orice $t \leq s \leq T$, au loc reprezentările*

$$(a) \quad B(t, T) = B(t, s) \exp\left(-\int_s^T f(t, u) du\right)$$

$$(b) \quad B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right).$$

Demonstrație. Avem, în mod evident, pentru prima formulă:

$$\begin{aligned} \exp \left(- \int_s^T f(t, u) du \right) &= \exp \left(- \int_s^T \left(- \frac{\partial \ln B(t, u)}{\partial u} du \right) \right) = \exp (\ln B(t, u)) \Big|_{u=s}^{u=T} \\ &= \exp (\ln B(t, T) - \ln B(t, s)) = \exp \left(\ln \frac{B(t, T)}{B(t, s)} \right) = \frac{B(t, T)}{B(t, s)}, \end{aligned}$$

de unde

$$B(t, T) = B(t, s) \exp \left(- \int_s^T f(t, u) du \right).$$

Pentru cea de a doua formulă este suficient să considerăm $s = t$ și să ținem cont de faptul că $B(t, t) = 1$.

În cele ce urmează vom considera W o mișcare Browniană 1-dimensională și filtrarea $\mathbb{F}$ cea generată de către W . Presupunem că dinamicile diferitelor tipuri de procese stochastice utilizate sunt date de următoarele EDS.

- dinamica dobânzii instantanee pe termen scurt (*short-rate*):

$$dr(t) = a(t) dt + b(t) dW_t \quad (1)$$

- dinamica prețului obligațiunii cu maturitate $T > 0$:

$$dB(t, T) = B(t, T) [m(t, T) dt + v(t, T) dW_t] \quad (2)$$

- dinamica dobânzii instantanee forward:

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t \quad (3)$$

Presupunem că toate funcțiile coeficient (driftul și difuzia) care apar în EDS introduse îndeplinesc condițiile standard de regularitate ce asigură existența și unicitatea soluțiilor EDS de mai sus. În plus, impunem condiții de derivabilitate în raport cu a doua variabilă pentru funcțiile v, m și f .

Propoziția 1.1 (i) Dacă $B(t, T)$ este guvernat de către ecuația (2), atunci pentru dinamica dobânzii forward avem:

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t,$$

unde coeficienții α și σ sunt dați de către

$$\begin{cases} \alpha(t, T) = v_T(t, T) v(t, T) - m_T(t, T) \\ \sigma(t, T) = -v_T(t, T), \end{cases}$$

unde v_T și m_T reprezintă derivatele parțiale ale funcțiilor v și m în raport cu variabila T .

(ii) Dacă $f(t, T)$ este guvernat de către ecuația (3), atunci dobânda short-rate satisface:

$$dr(t) = a(t) dt + b(t) dW_t,$$

unde coeficienții a și b sunt dați de către

$$\begin{cases} a(t) = f_T(t, T) + \alpha(t, t) \\ b(t) = \sigma(t, t). \end{cases}$$

(iii) Dacă $f(t, T)$ este guvernat de către ecuația (3), atunci $B(t, T)$ satisface

$$dB(t, T) = B(t, T) \left\{ r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2} S^2(t, T) \right\} dt + B(t, T) S(t, T) dW_t,$$

unde

$$A(t, T) := - \int_t^T \alpha(t, s) ds \quad \text{și} \quad S(t, T) := - \int_t^T \sigma(t, s) ds.$$

Demonstrație.

(i) Prețul obligațiunii este dat de către o EDS liniară, deci aceasta admite o soluție explicită:

$$B(t, T) = B(0, T) \exp \left(v(t, T) W_t + \left(m(t, T) - \frac{1}{2} v^2(t, T) \right) t \right).$$

De aici, prin logaritmare, obținem

$$\ln B(t, T) = \ln B(0, T) + \left[v(t, T) W_t + \left(m(t, T) - \frac{1}{2} v^2(t, T) \right) t \right].$$

Efectuăm derivarea parțială în raport cu variabila T și avem

$$-\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} = -\frac{\partial \ln B(0, T)}{\partial T} + [-v_T(t, T) W_t + (-m_T(t, T) + v(t, T) v_T(t, T)) t].$$

La ultimul pas obținem că

$$d \left(-\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} \right) = \underbrace{-v_T(t, T) dW_t}_{\sigma(t, T)} + \underbrace{(-m_T(t, T) + v(t, T) v_T(t, T)) dt}_{\alpha(t, T)},$$

adică

$$df(t, T) = \sigma(t, T) dW_t + \alpha(t, T) dt.$$

(ii) Scriem, pentru început, dinamica dobânzii forward sub formă integrală

$$r(t) = f(t, t) \stackrel{(3)}{=} f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t) ds + \int_0^t \sigma(s, t) dW_s. \quad (4)$$

Regularitatea coeficienților α și σ ne permite următoarea scriere sub formă integrală

$$\begin{aligned} \alpha(s, t) &= \alpha(s, s) + \int_s^t \alpha_T(s, u) du \\ \sigma(s, t) &= \sigma(s, s) + \int_s^t \sigma_T(s, u) du. \end{aligned}$$

Inserăm ultimele două reprezentări în formula (4) și obținem

$$r(t) = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, s) ds + \int_0^t \int_s^t \alpha_T(s, u) duds + \int_0^t \sigma(s, s) ds + \int_0^t \int_s^t \sigma_T(s, u) dudW_s.$$

Schimbăm ordinea de integrare, ajustăm noile capete de integrare și identificăm coeficienții specificați în enunțul teoremei.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \int_0^t \int_s^t \alpha_T(s, u) duds + \int_0^t \int_s^t \sigma_T(s, u) dudW_s \\ &= \int_0^t \int_0^u \alpha_T(s, u) dsdu + \int_0^t \int_0^u \sigma_T(s, u) dW_s du. \end{aligned}$$

Diferențiind, obținem, considerând în definiția lui $f(t, T)$, $T = t$,

$$d\mathcal{E} = \int_0^t \alpha_T(s, t) ds + \int_0^t \sigma_T(s, t) dW_s = f_T(t, t).$$

Prin urmare,

$$dr(t) = \alpha(t, t) dt + \sigma(t, t) dW_t + f_T(t, t) dt = \underbrace{(\alpha(t, t) + f_T(t, t))}_{a(t)} dt + \underbrace{\sigma(t, t)}_{b(t)} dW_t$$

(iii) Din definiția ratei forward, putem scrie procesul prețului obligațiunii astfel:

$$B(t, T) = e^{Z(t, T)},$$

unde

$$Z(t, T) = - \int_t^T f(t, s) ds.$$

Scriem (3) sub formă integrală și obținem, pentru $T = s \geq t$,

$$f(t, s) = f(0, s) + \int_0^t \alpha(u, s) du + \int_0^t \sigma(u, s) dW_u.$$

Inserăm această reprezentare în formula procesului Z și avem

$$Z(t, T) = - \int_t^T f(0, s) ds - \int_0^t \int_t^T \alpha(u, s) ds du - \int_0^t \int_t^T \sigma(u, s) ds dW_u.$$

Despărțim integralele de mai sus pe subintervale și schimbăm din nou ordinea de integrare în ultimele două integrale, ca la punctul precedent. Obținem astfel:

$$\begin{aligned} Z(t, T) &= - \int_0^T f(0, s) ds - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, s) ds du - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, s) ds dW_u \\ &+ \int_0^t f(0, s) ds + \int_0^t \int_u^t \alpha(u, s) ds du + \int_0^t \int_u^t \sigma(u, s) ds dW_u \\ &= Z(0, T) - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, s) ds du - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, s) ds dW_u \\ &+ \int_0^t f(0, s) ds + \int_0^t \int_0^s \alpha(u, s) du ds + \int_0^t \int_0^s \sigma(u, s) dW_u ds. \end{aligned}$$

Ultima linie din calculul anterior reprezintă chiar forma integrală a dinamicii ratei forward (3) pe intervalul $[0, s]$. Deoarece

$$r(s) = f(s, s),$$

această linie este egală cu

$$\int_0^t r(s) ds.$$

Prin urmare, obținem

$$Z(t, T) = Z(0, T) + \int_0^t r(s) ds - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, s) ds du - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, s) ds dW_u.$$

Utilizăm formulele de definire ale cantităților

$$A(t, T) := - \int_t^T \alpha(t, s) ds \quad \text{și} \quad S(t, T) := - \int_t^T \sigma(t, s) ds,$$

ceea ce conduce la

$$dZ(t, T) = [r(t) + A(t, T)] dt + S(t, T) dW_t.$$

Aplicăm acum formula lui Itô procesului stochastic

$$B(t, T) = e^{Z(t, T)}$$

și rezultă

$$dB(t, T) = \left[e^{Z(t, T)} (r(t) + A(t, T)) + \frac{1}{2} e^{Z(t, T)} S(t, T)^2 \right] dt + e^{Z(t, T)} S(t, T) dW_t,$$

adică, ținând cont de formula lui $B(t, T)$,

$$dB(t, T) = B(t, T) \left\{ r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2} S(t, T)^2 \right\} dt + B(t, T) S(t, T) dW_t,$$

ceea ce finalizează demonstrația teoremei.

2 Determinarea prețului obligațiunilor și măsuri martingale

Definiția 4 O măsură de probabilitate $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ (definită pe spațiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{F})$) este o măsură martingală pentru piața de obligațiuni dacă, pentru orice $0 \leq t \leq T^*$, procesul actualizat

$$\frac{B(t, T)}{B(t)} \text{ este o } \mathbb{P}^* \text{ martingală.}$$

Prin $B(t)$ am notat contul bancar fără risc (sau contul de economii), ce a fost considerat ca numerarul în raport cu care se calculează valoarea actualizată la momentul t a obligațiunii financiare. Vom presupune că există o astfel de măsură martingală echivalentă, $\mathbb{P}^*$.

Propoziția 2.1 Fie un T -derivat financiar X . Prețul său (fair price) la orice moment $0 \leq t \leq T$, va fi dat de către formula de evaluare la risc neutru (risk-neutral valuation formula):

$$\pi_t(X) = B(t) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(\frac{X}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(X e^{-\int_t^T r(s) ds} | \mathcal{F}_t \right),$$

unde $r(t)$ este dobânda instantanee pe termen scurt.

În particular, procesul prețului unei obligațiuni nepurtătoare de dividende, cu data de maturitate T este

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(e^{-\int_t^T r(s) ds} | \mathcal{F}_t \right).$$

2.1 Modele de dobânzi pe termen scurt (short-term rate models)

Considerăm modelul dobânzii pe termen scurt de tipul

$$dr(t) = a(t, r(t)) dt + b(t, r(t)) dW_t, \quad (5)$$

coeficienții de drift și de difuzie sunt suficienți de regulați, iar W este o mișcare Browniană 1-dimensională.

Vom presupune că are loc formula (5) sub măsura de probabilitate $\mathbb{P}$. Orice măsură de probabilitate echivalentă va fi dată de către densitatea Girsanov:

$$L(t) = \exp \left(-\int_0^t \gamma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2(u) du \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Presupunem acum că γ este de forma

$$\gamma = \lambda(t, r(t)),$$

cu λ o funcție suficient de netedă în ambele variabile. Vom folosi notația $\mathbb{P}^*(\lambda)$ pentru a sugera dependența măsurii de probabilitate $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ de densitatea λ . Conform Teoremei lui Girsanov rezultă că

$$\bar{W} := W + \int \lambda dt$$

este o $\mathbb{P}^*$ mișcare Browniană, iar în această situație, dinamica procesului r sub măsura de probabilitate $\mathbb{P}^*$ este dată de

$$dr(t) = \{a(t, r(t)) - b(t, r(t)) \lambda(t, r(t))\} dt + b(t, r(t)) d\bar{W}_t.$$

Considerăm acum un T -derivat financiar oarecare

$$X = \Phi(r(T)), \quad \Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Aplicăm formula de evaluare la risc neutru și obținem

$$F(t, r(t)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*(\lambda)} \left[\exp \left(-\int_t^T r(u) du \right) \Phi(r(T)) | \mathcal{F}_t \right],$$

funcția $F: [0, T^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fiind soluție a EDP:

$$F_t(t, r) + (a(t, r) - b(t, r) \lambda(t, r)) F_r(t, r) + \frac{1}{2} b^2(t, r) F_{rr}(t, r) - r(t) F(t, r) = 0,$$

sau, pe scurt,

$$F_t + (a - b\lambda) F_r + \frac{1}{2} b^2 F_{rr} - rF = 0,$$

cu condiția finală

$$F(T, r) = \Phi(r), \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Presupunem că procesul prețului $B(t, T)$ unei T -obligațiuni (sau T -bond) este determinat de

$$B(t, T) = F(t, r(t); T),$$

cu condiția finală $F(T, r; T) = 1$.

Propoziția 2.2 (Ecuția de structură) Fie un T -derivat financiar de forma $X = \Phi(r(T))$. Prețul de arbitraj al acestui derivat financiar va fi dat de către

$$\pi_t(X) = F(t, r(t)),$$

unde funcția F este soluția EDP

$$F_t + aF_r + \frac{1}{2} b^2 F_{rr} - rF = 0, \quad (6)$$

cu condiția terminală $F(T, r) = \Phi(r)$.

În particular, prețurile T -bond-urilor sunt date de

$$B(t, T) = F(t, r(t); T),$$

funcția F satisfăcând ecuația (6), cu condiția finală $F(T, r; T) = 1$.

Considerăm acum că dorim să evaluăm prețul unui Call European cu maturitatea S și prețul de exercitare K , având ca activ suport un T -bond. Prin urmare, funcția de plată este

$$X = (B(S, T) - K)^+ = \max\{B(S, T) - K, 0\}.$$

Prețul dat de $B(t, T) = F(t, r; T)$ se obține rezolvând EDP considerată mai sus. Din formula de evaluare la risc neutru obținem

$$\pi_t(X) = G(t, r),$$

unde funcția G verifică

$$G_t + aG_r + \frac{b^2}{2} G_{rr} - rG = 0,$$

cu condiția finală

$$G(S, r) = \max\{F(S, r; T) - K, 0\}, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Problema ce apare constă în stabilirea unor coeficienți de drift și de difuzie convenabili, care să permită rezolvarea sau simularea soluției EDP ce apare în determinarea prețurilor.

Definiția 5 Dacă prețul obligațiunilor este dat de

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

cu A și B funcții deterministe, spunem că modelul posedă o structură afină.

Exemple clasice de modele de dobânzi pe termen scurt sunt date reprezentate de:

- modelul Vasicek

$$dr = (\alpha - \beta r) dt + \gamma dW_t$$

- modelul Cox-Ingersoll-Ross

$$dr = (\alpha - \beta r) dt + \gamma \sqrt{r} dW_t$$

- modelul Ho-Lee

$$dr = \alpha(t) dt + \gamma dW_t$$

- modelul Hull-White 1 (extensie a modelului Vasicek)

$$dr = (\alpha(t) - \beta(t)r) dt + \gamma(t) dW_t$$

- modelul Hull-White 2 (extensie a modelului Cox-Ingersoll-Ross)

$$dr = (\alpha(t) - \beta(t)r) dt + \gamma(t) \sqrt{r} dW_t$$

2.2 Clasa modelelor Heath-Jarrow-Morton

Pentru modelarea structurii dobânzii, Heath, Jarrow și Morton au propus luarea în considerație a întregii dinamici pentru dobânda forward ca variabilă de stare. Mai precis, pentru orice $T \leq T^*$ arbitrar, fixat, dinamica dobânzii forward instantanee, notată cu $f(t, T)$ satisface EDS

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t, \quad (7)$$

unde W este o mișcare Browniană d -dimensională în raport cu măsura de probabilitate $\mathbb{P}$, iar α și σ sunt procese stochastice adaptate cu valori în $\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{R}^d$. Pentru orice dată de maturitate T condiția inițială, la momentul 0, atașată ecuației anterioare este determinată de către valoarea curentă, observată empiric a dobânzii forward.

Specificarea familiei de dobânzi forward

$$\{f(t, T); T > 0\}$$

este echivalentă cu cunoașterea întregii familii

$$\{B(t, T); T > 0\}$$

a prețurilor obligațiunilor. Chiar mai mult, are loc următoarea reprezentare a procesului prețului obligațiunilor:

$$dB(t, T) = B(t, T) [m(t, T) dt + S(t, T) dW_t],$$

unde

$$m(t, T) = r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2} \|S(t, T)\|^2,$$

iar

$$A(t, T) = - \int_t^T \alpha(t, s) ds \quad \text{și} \quad S(t, T) = - \int_t^T \sigma(t, s) ds.$$

Studiem care sunt condițiile ce trebuie impuse coeficienților pentru a asigura existența unei măsuri martingale echivalente, în raport cu un numerar convenabil ales. În acest fel vom putea obține că modelul de piață de obligațiuni considerată este fără arbitraj.

Putem considera drept numerar în piața considerată un cont bancar (cont de economii) fără risc, pe care îl vom nota cu B , și a cărui reprezentare este

$$B(t) = \exp \left(\int_0^t f(u, u) du \right) = \exp \left(\int_0^t r(u) du \right).$$

Trebuie determinată o măsură de probabilitate echivalentă astfel încât valoarea actualizată

$$Z(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t)}$$

să fie o martingală, pentru orice $0 \leq T \leq T^*$. Vom numi această măsură de probabilitate *măsură martingală de risc neutru* (*risk-neutral martingale measure*), pentru a pune astfel în evidență faptul că ea depinde de numerarul ales în raport cu care se face actualizarea.

Teorema 1 Presupunem că dinamica familiei de dobânzi forward este dată prin EDS (7). Atunci există o măsură martingală de risc neutru dacă și numai dacă există un proces stochastic adaptat $\lambda(t)$ ce verifică

$$(i) \int_0^T \|\lambda(t)\|^2 dt < \infty, \quad \mathbb{P} - a.s. \quad \text{și} \quad \mathbb{E}(L(T)) = 1, \text{ unde}$$

$$L(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda(u)\|^2 du \right). \quad (8)$$

(ii) Pentru toți $0 \leq T \leq T^*$ și pentru toți $t \leq T$, are loc

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds + \sigma(t, T) \lambda(t).$$

Demonstrație. Deoarece ne situăm într-un cadru Brownian, știm că orice măsură de probabilitate echivalentă $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ este dată de către densitatea Girsanov (8). Mai precis, aplicând formula lui Itô se poate verifica că *exponențiala Doléans* a lui $U_t := -\int_0^t \lambda(u) dW_u$, care este tocmai procesul $L(t)$, este soluția unică a EDS

$$dL(t) = L(t) \lambda(t) dW_t = L(t) dU_t,$$

cu condiția inițială $L(0) = 1$. Prin urmare, procesul

$$L(t) = \exp \left\{ -\int_0^t \lambda(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda(u)\|^2 du \right\}$$

este o martingală continuă, iar dacă este satisfăcută și *condiția Novikov*:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda(s)\|^2 ds \right\} \right) < \infty,$$

atunci, definind procesul stochastic $\tilde{W} = (\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_d)$,

$$\tilde{W}_i(t) := W_i(t) + \int_0^t \lambda_i(s) ds, \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq T \quad \text{și} \quad i = 1, 2, \dots, d,$$

acesta este o mișcare Browniană d -dimensională în raport cu măsura de probabilitate $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ (definită pe $(\Omega, \mathcal{F}_T)$), a cărei derivată Radon-Nikodym este

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L(T).$$

Aplicăm formula lui Itô și obținem că dinamica procesului $Z(t, T)$, considerată sub măsura de probabilitate echivalentă $\mathbb{Q}$ este data de:

$$dZ(t, T) = Z(t, T) \left[A(t, T) + \frac{1}{2} \|S(t, T)\|^2 - S(t, T) \lambda(t) \right] dt + Z(t, T) S(t, T) d\tilde{W}_t, \quad (9)$$

$\tilde{W}$ fiind o $\mathbb{Q}$ -mișcare Browniană. Într-adevăr, pentru simplitatea prezentării omițând argumentul dublu (t, T) , avem

$$\begin{aligned} dZ &= B_t^{-1} dB = \frac{1}{B_t} B [mdt + SdW_t] + B dB_t^{-1} \\ &= Z [mdt + SdW_t] - r B B_t^{-1} dt \\ &= Z [mdt + SdW_t] - r Z dt = Z \left[\left(r + A + \frac{1}{2} \|S\|^2 \right) dt + SdW_t \right] - r Z dt \\ &= Z \left[\left(r + A + \frac{1}{2} \|S\|^2 \right) dt + S \left(d\tilde{W}_t - \lambda(t) dt \right) \right] - r Z dt \\ &= Z \left[A + \frac{1}{2} \|S\|^2 + S\lambda(t) \right] dt + Z S d\tilde{W}_t + r Z dt - r Z dt \\ &= Z \left[A + \frac{1}{2} \|S\|^2 + S\lambda(t) \right] dt + Z S d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Pentru ca Z să fie o $\mathbb{Q}$ -martingală trebuie ca termenul de drift din (9) să fie zero, adică obținem că

$$A(t, T) + \frac{1}{2} \|S(t, T)\|^2 = S(t, T) \lambda(t).$$

Derivând în raport cu variabila T și ținând cont de formule lui A și S , obținem

$$-\alpha(t, T) - \sigma(t, T) S(t, T) = -\sigma(t, T) \lambda(T),$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 2 (Heath-Jarrow-Morton) Presupunem că $\mathbb{Q}$ este măsura martingală de risc neutru pentru piața de obligațiuni și că dinamica, sub $\mathbb{Q}$, a dobânzii forward este dată prin

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}_t,$$

unde $\tilde{W}$ este o $\mathbb{Q}$ -mișcare Browniană. Atunci avem:

(i) condiția Heath-Jarrow-Morton pentru coeficientul de drif:

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds, \quad 0 \leq t \leq T \leq T^*, \quad \mathbb{Q} - a.s \quad (10)$$

(ii) dinamica prețului, sub $\mathbb{Q}$, a prețului obligațiunilor

$$dB(t, T) = B(t, T) r(t) dt + B(t, T) S(t, T) d\tilde{W}_t,$$

unde S este dat de $S(t, T) = - \int_t^T \sigma(t, s) ds$.

2.3 Măsurî martingale forward de risc neutru

În anumite situații este mai util a se utiliza prețul obligațiunii $B(t, T^*)$ drept numerar în raport cu care se face actualizarea. În această situație ar trebui determinată o măsură de probabilitate $\mathbb{Q}^*$, echivalentă cu $\mathbb{P}$, astfel încât procesul

$$Z^*(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, T^*)}, \quad \forall t \in [0, T]$$

să fie o martingală sub $\mathbb{Q}^*$ pentru toți $T \leq T^*$. Vom numi această măsură de probabilitate *măsură martingală forward de risc neutru* (*forward risk-neutral martingale measure*). În acest cadru nu utilizăm un cont de economii, iar existența unei măsuri martingale $\mathbb{Q}^*$ va garanta că nu există oportunități de arbitraj între obligațiuni cu diferite momente de maturitate. Tehnica utilizată pentru determinarea condițiilor encasare și suficiente pentru o astfel de măsură martingală urmează aceeași pași ca și în situația contului de economii.

Prețul obligațiunilor presupunem că este guvernat de EDS

$$dB(t, T) = B(t, T) [m(t, T) dt + S(t, T) dW_t],$$

coeficienții m și S fiind definiți anterior. Aplicăm formula lui Itô procesului

$$Z^*(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, T^*)}$$

și obținem

$$dZ^*(t, T) = Z^*(t, T) (\tilde{m}(t, T) dt + (S(t, T) - S(t, T^*)) dW_t),$$

unde $\tilde{m}(t, T) = m(t, T) - m(t, T^*) - S(t, T^*) (S(t, T) - S(t, T^*))$.

Chiar mai mult, pentru procesele $B(t, T)$ și $B(t, T^*)$ avem soluții explicite, date de

$$\begin{aligned} B(t, T) &= B(0, T) \exp \left(\int_0^t S(u, T) dW_u + \int_0^t \left(m(u, T) - \frac{1}{2} S^2(u, T) \right) du \right) \\ B(t, T^*) &= B(0, T^*) \exp \left(\int_0^t S(u, T^*) dW_u + \int_0^t \left(m(u, T^*) - \frac{1}{2} S^2(u, T^*) \right) du \right), \end{aligned}$$

de unde obținem

$$\begin{aligned} Z^*(t, T) &= \frac{B(t, T)}{B(t, T^*)} = \frac{B(0, T)}{B(0, T^*)} \times \\ &\exp \left\{ \int_0^t (S(u, T) - S(u, T^*)) dW_u + \int_0^t \left[(m(u, T) - m(u, T^*)) - \frac{1}{2} (S(u, T) - S(u, T^*))^2 \right] du \right\} \times \\ &\exp \left\{ \int_0^t S(u, T^*) (S(u, T) - S(u, T^*)) du \right\}. \end{aligned}$$

Prin urmare, procesul $Z^*(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, T^*)}$ verifică EDS

$$dZ^*(t, T) = Z^*(t, T) [\tilde{m}(t, T) dt + (S(t, T) - S(t, T^*)) dW_t],$$

unde am notat $\tilde{m}(t, T) = m(t, T) - m(t, T^*) - S(t, T^*) (S(t, T) - S(t, T^*))$.

Din nou, orice măsură martingală $\mathbb{Q}^*$ este dată de către densitatea Girsanov $L(t)$ de tipul celei definite anterior. Prin urmare, coeficientul de drift al procesului $Z^*(t, T)$, atunci când este considerat sub măsura $\mathbb{Q}^*$, este dat de

$$\tilde{m}(t, T) - (S(t, T) - S(t, T^*)) \gamma(t),$$

γ fiind funcția corespunzătoare lui $L(t)$. Pentru ca $Z^*(t, T)$ să fie o martingală sub $\mathbb{Q}^*$ e necesar ca acest coeficient să fie egal cu zero, ceea ce conduce, înlocuindu-l pe $\tilde{m}$ cu definiția sa, la

$$(A(t, T) - A(t, T^*)) + \frac{1}{2} (\|S(t, T)\|^2 - \|S(t, T^*)\|^2) = (S(t, T^*) + \gamma(t)) (S(t, T) - S(t, T^*)).$$

Scriind în terminologia coeficienților dinamicii dobânzii forward, identitatea anterioară capătă forma simplificată

$$\int_T^{T^*} \alpha(t, s) ds + \frac{1}{2} \left\| \int_T^{T^*} \sigma(t, s) ds \right\|^2 = \gamma(t) \int_T^{T^*} \sigma(t, s) ds.$$

Derivăm în raport cu T și obținem

$$\alpha(t, T) + \sigma(t, T) \int_T^{T^*} \sigma(t, s) ds = \gamma(t) \sigma(t, T).$$

An demonstrat, prin urmare, următorul rezultat.

Teorema 3 *Presupunem că familia dobânzilor forward este dată de EDS (7). Atunci există o măsură martingală forward de risc neutru dacă și numai dacă există un proces stochastic adaptat $\gamma(t)$ ce satisface (8), astfel încât,*

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) (S(T, T^*) + \gamma(t)), \quad 0 \leq t \leq T \leq T^*.$$

3 Determinarea prețului și acoperirea la risc pentru derivate financiare cu active suport obligațiuni

Presupunem că dinamica dobânzii forward, scrisă sub o măsură martingală de risc neutru, este

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}_t, \quad f(0, T) = \hat{f}(0, T).$$

Restrângem clasa modelelor presupunând că volatilitatea dobânzii forward este deterministă. Condiția HJM pentru drift (10) și forma integrală a dobânzii forward conduc la

$$f(t, t) = r(t) = f(0, t) + \int_0^t (-\sigma(u, t) S(u, t)) du + \int_0^t \sigma(u, t) d\tilde{W}_u,$$

ceea ce arată că dobânda pe termen scurt are o lege de probabilitate Gaussiană. Conform Teoremei Heath-Jarrow-Morton rezultă că dinamica, sub $\mathbb{Q}$, a prețului obligațiunii este dată de

$$dB(t, T) = B(t, T) \left\{ r(t) dt + S(t, T) d\tilde{W}_t \right\}.$$

Pentru a determina prețul opțiunilor ce au ca active suport obligațiuni neplătitoare de cupoane utilizăm tehnica schimbării numererului. Să considerăm, pentru exemplificare, o opțiune de call european, notată cu C , ce are ca activ suport o T^* -obligațiune, maturitatea opțiunii fiind T , iar prețul său de exercitare K . Avem de a face deci cu T -derivatul financiar

$$X = (B(T, T^*) - K)^+. \quad (11)$$

Prețul derivatului financiar la momentul $t = 0$ este dat de

$$C(0) = B(0, T^*) \mathbb{Q}^*(A) - KB(0, T) \mathbb{Q}^T(A),$$

unde

$$A = \{\omega \mid B(T, T^*) > K\}$$

și $\mathbb{Q}^T$, respectiv $\mathbb{Q}^*$ sunt T -, respectiv T^* -măsură martingale forward de risc neutru.

Procesul

$$\tilde{Z}(t, T) := \frac{B(t, T^*)}{B(t, T)}$$

are următoarea dinamică sub $\mathbb{Q}$ (omitem la scriere argumentul și utilizăm notația S^* pentru $S(t, T^*)$)

$$d\tilde{Z} = \tilde{Z} \left[S(S - S^*) dt - (S - S^*) d\tilde{W}_t \right],$$

adică un coeficient de varianță determinist.

Pe de altă parte,

$$\mathbb{Q}^*(B(T, T^*) \geq K) = \mathbb{Q}^*\left(\frac{B(T, T^*)}{B(T, T)} \geq K\right) = \mathbb{Q}^*(\tilde{Z}(T, T) \geq K).$$

Deoarece $\tilde{Z}(t, T)$ este o $\mathbb{Q}^T$ martingală, cu dinamica, sub $\mathbb{Q}^T$,

$$d\tilde{Z}(t, T) = -\tilde{Z}(t, T) [S(t, T) - S(t, T^*)] dW_t^T,$$

obținem că, sub $\mathbb{Q}^T$ (notăm din nou $S = S(t, T)$ și $S^* = S(t, T^*)$),

$$\tilde{Z}(T, T) = \frac{B(0, T^*)}{B(0, T)} \exp \left\{ -\int_0^T (S - S^*) dW_t^T - \frac{1}{2} \int_0^T (S - S^*)^2 dt \right\},$$

cu W^T o $\mathbb{Q}^T$ -mișcare Browniană. Integrala stochastică din exponențială este un proces Gaussian, de medie zero și varianță

$$\Sigma^2(T) = \int_0^T (S(t, T) - S(t, T^*))^2 dt.$$

Avem, prin urmare,

$$\mathbb{Q}^T(B(T, T^*) \geq K) = \mathbb{Q}^T(\tilde{Z}(T, T) \geq K) = N(d_2),$$

unde

$$d_2 = \frac{\ln \left(\frac{B(0, T)}{KB(0, T^*)} \right) - \frac{1}{2} \Sigma^2(T)}{\sqrt{\Sigma^2(T)}}.$$

În mod analog, pentru primul termen

$$Z^*(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, T^*)}$$

are dinamica, sub $\mathbb{Q}$,

$$dZ^* = Z^* \left[S^*(S^* - S) dt + (S - S^*) d\tilde{W}_t \right]$$

și are tot coeficientul de varianță determinist. Prin urmare,

$$\mathbb{Q}^*(B(T, T^*) \geq K) = \mathbb{Q}^*\left(\frac{1}{B(T, T^*)} \leq \frac{1}{K}\right) = \mathbb{Q}^*\left(Z^*(T, T) \leq \frac{1}{K}\right).$$

Sub măsura $\mathbb{Q}^*$, $Z^*(t, T)$ este un proces martingal ce satisface EDS

$$dZ^*(t, T) = Z^*(t, T) [S(t, T) - S(t, T^*)] dW_t^*,$$

de unde

$$Z^*(T, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, T^*)} \exp \left\{ \int_0^T (S - S^*) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T (S - S^*)^2 dt \right\}.$$

Din nou, avem o variabilă aleatoare cu aceeași varianță în exponențială, $\Sigma^2(T)$, ca și în cazul anterior, de unde rezultă că

$$\mathbb{Q}^*(B(T, T^*) \geq K) = N(d_1),$$

unde

$$d_1 = d_2 + \sqrt{\Sigma^2(T)}.$$

Prin urmare, am obținut următorul rezultat.

Teorema 4 Prețul unei opțiuni de call europeană definită de (11) este dat de

$$C(0) = B(0, T^*) N(d_2) - KB(0, T) N(d_1),$$

funcțiile d_1 și d_2 fiind definite anterior.

Bibliografie

- [1] Bielecki, T; Jeanblanc, M; Rutkowski M., *Introduction to Mathematics of Credit Risk Modeling*, Stochastic Models in Mathematical Finance, CIMPA-UNESCO-MOROCCO School, Marrakech, Morocco, April 9-20, 2007.
- [2] Bremaud, P., *An Introduction to Probabilistic Modeling*, Springer-Verlag, 1988.
- [3] Cox, J.C.; Ross. S.A., *The valuation of options for alternative stochastic processes*, J. Finan. Econom. 3, pp. 145-166, 1976.
- [4] Cox, J.C.; Ross. S.A.; Rubinstein, M., *Option Pricing: A Simplified Approach*, J. Finan. Econom., September, 1979.
- [5] Evens, L., *An introduction to stochastic differential equations*, Department of Mathematics, UC Berkeley, preprint.
- [6] Hull, J. C., *Options, Futures and Other Derivatives*, 4th ed., Prentice Hall, 1999.
- [7] Karatzas, I.; Shreve, S.E., *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, N.Y, 1998.
- [8] Malliaris, A. G., *Itô's calculus in financial decision making*, SIAM Review 25, pp. 481–496, 1983.
- [9] Merton, R. C., *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1), pp. 141–183, 1973.
- [10] Musiela, M; Rutkowski, M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, second edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [11] Oksendal, B. K., *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 4th ed., Springer-Verlag, 1995.